This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

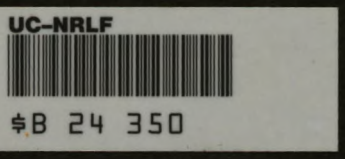
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

QC
638
W5



YC 11054

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
RECEIVED BY EXCHANGE
Class 386
W163

Quantitative Untersuchungen über die Thomsonschen Abstossungsversuche.

Inaugural-Dissertation,

die zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

nebst den beigefügten Thesen

mit

Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Universität Greifswald

am Sonnabend, den 22. April 1905 Mittags 12 Uhr

öffentlich verteidigen wird

Alfred Winderlich.

Opponenten:

Herr **Rudolf Seeliger,** cand. math.
Herr **Werner Rowe,** cand. math.

Gräfenhainichen.
C. Schulze & Co., G. m. b. H.
1905.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

2C6
W5

Gedruckt
mit Genehmigung der philosophischen Fakultät
der Königl. Universität Greifswald.

Dekan: Professor Dr. A. Gercke.
Referent: Professor Dr. W. König.

Digitized by Google

Meinen lieben Eltern.

166262

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Quantitative Untersuchungen über die Thomsonschen Abstossungsversuche.

Einleitung.

Zu den schönsten Vorlesungsexperimenten, durch die man Faradays klassische Entdeckung der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise demonstrieren kann, gehören die bekannten Abstoßungsversuche, welche Professor Elihu Thomson zuerst im Jahre 1887 beobachtet und klargelegt hat. Über den Polen eines Elektromagneten, senkrecht zur Richtung seiner Achse wird ein Kupferring aufgehängt und der Elektromagnet durch einen Wechselstrom erregt, der genau nach einer einfachen Sinuskurve variiert. In dem Ringe wird dann eine elektromotorische Kraft induziert, welche ebenfalls eine Sinusschwingung von gleicher Periode vollführt, die aber natürlich in der Phase um eine Viertelperiode hinter der primären Stromschwingung zurückbleibt. da das Maximum der induzierten elektromotorischen Kraft ja zeitlich mit dem Wechsel des Magnetismus im Elektromagneten zusammenfällt. Würde nun der Selbstinduktionskoeffizient des Ringes gleich Null sein, so würden die induzierten Wechselströme genau synchron mit der induzierten elektromotorischen Kraft im Ringe verlaufen. Auf letzteren würde dann also in der ersten, dritten, fünften ... Viertelperiode eine abstoßende, in der zweiten, vierten, sechsten ... Viertelperiode aber eine ebenso starke anziehende Kraft wirken, so daß der Ring tatsächlich in Ruhe bliebe. (Fig 1.)

In Wirklichkeit besitzt nun aber der Ring stets einen Selbstinduktionskoeffizienten, der größer als Null ist, so daß die Periode des sekundären Stromes hinter derjenigen der sekundären elektromotorischen Kraft um einen gewissen Phasenverschiebungswinkel zurückbleibt. Wie aus Fig. 2 ersichtlich

Digitized by Google

ist, überwiegt also jetzt die Abstoßung gegenüber der Anziehung und der Ring wird mithin dauernd abgestoßen.

Fig. 1.

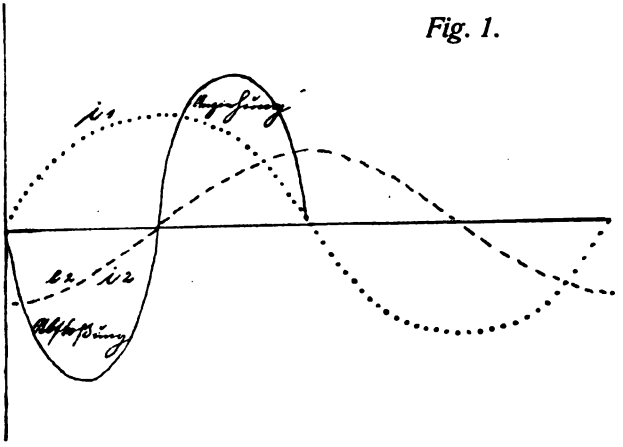
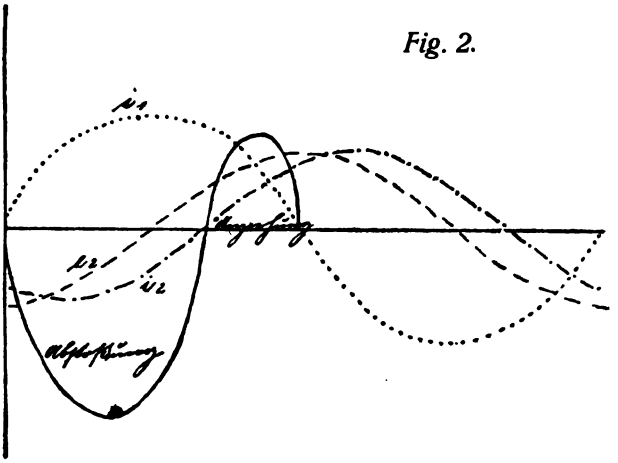


Fig. 2.



Durch die Konstruktion des Wehneltunterbrechers, welcher bekanntlich Gleichstrom in überaus regelmäßiger Weise sehr rasch unterbricht, ist es nun ermöglicht, diesen hübschen Versuch auch in Laboratorien auszuführen, in denen Wechselstrom nicht zur Verfügung steht. Natürlich liegen aber dann die Verhältnisse ganz anders, und die für Sinusströme geltende

Digitized by Google

Form der Erklärung hat keine Bedeutung mehr für diesen Fall. Es schien daher von Interesse, durch eine genaue Analyse des Verlaufs der beiden Ströme die in diesem Falle geltenden Gründe für eine dauernde Abstoßung des Ringes klar zu legen.

Vorversuche und Versuchsanordnung.

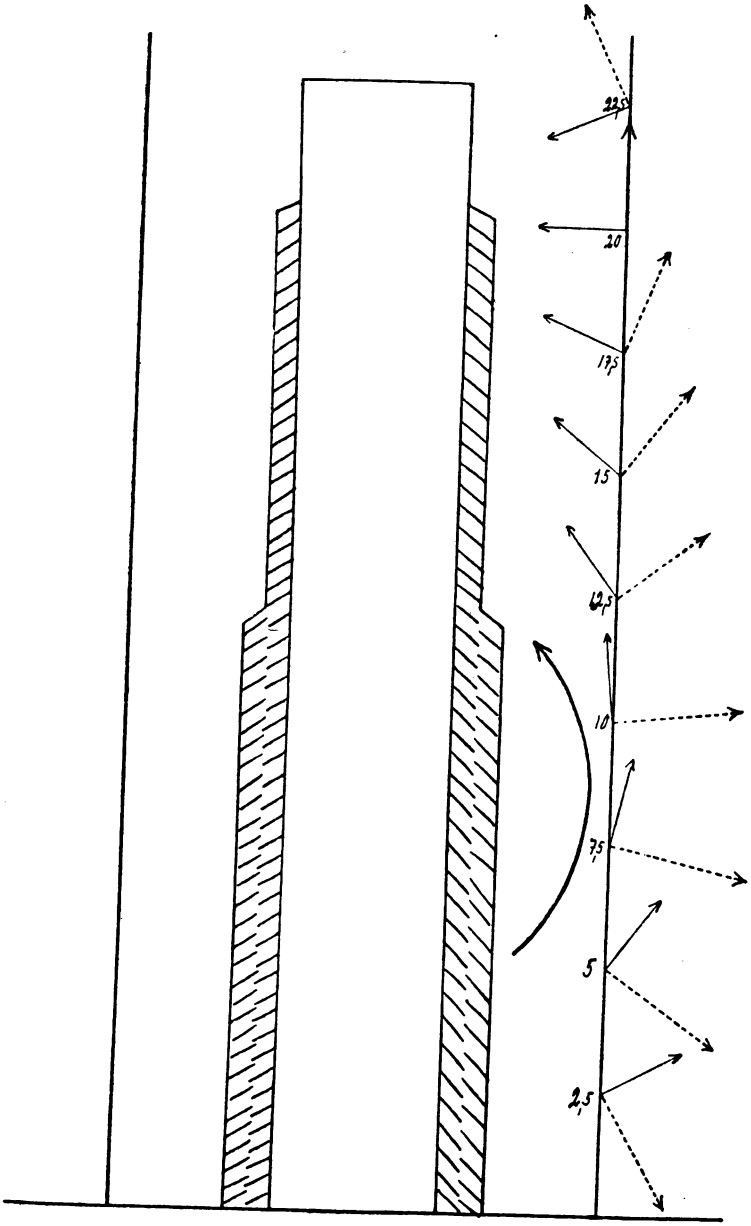
Für die Vorführung der Thomsonversuche bei Verwendung des Wehneltunterbrechers wird von der Firma Ernecke ein Elektromagnet geliefert, wie ihn die umstehende Wiedergabe einer Röntgenphotographie im Durchschnitt zeigt. Um ein ungefähr 22,5 cm langes Bündel von Eisenstäben sind zwei Lagen gut umsponnenen Kupferdrahtes gewickelt, so daß die oberen 2,5 cm unbedeckt sind, jede Lage von ungefähr 70 Windungen; außerdem sind zwei weitere Schichten von je 40 Windungen über die unteren 12 cm gelagert. Als sekundären Stromkreis benutzte ich einen fast ganz geschlossenen Ring aus dickem Kupferdraht von 9,7 cm Durchmesser, der über dem Elektromagneten aufgehängt war. Seine Enden waren noch ungefähr 0,5 m horizontal und parallel weitergeführt, bogen dann senkrecht nach unten um und tauchten in zwei Quecksilbernäpfchen.

Die merkwürdige Form des Elektromagneten veranlaßte mich, mir vor allem über den Verlauf und die Intensität des entstehenden Feldes Klarheit zu verschaffen. Nach der von W. Leick angegebenen Methode*) fertigte ich daher eine Röntgenaufnahme des entstehenden Kraftfeldes an. Ich legte den Elektromagneten horizontal und schnitt einen starken Karton so zurecht, daß der Ausschnitt genau die Form eines Durchschnitts des Magneten besaß. Um den Durchschnitt der Kraftlinien mit dem sekundären Ringe in verschiedenen Aufhängelagen anzugeben, hatte ich auf der Unterseite des Kartons parallel zum Ausschnitt zwei Messingdrähte im Abstande von 9,7 cm befestigt, welche also die Durchschnittspunkte des Ringes mit

---

*) Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen, Bd. 2. S. 165—168. 1899.

Digitized by Google



Digitized by Google

der Ebene des Kartons markierten. Der Magnet wurde nun durch einen schwachen Gleichstrom erregt und auf dem Karton das Feld durch Eisenfeilspäne dargestellt. Dann legte ich den Karton vorsichtig auf die Holzkassette, welche die photographische Platte enthielt, und schob noch in den Ausschnitt ein Stück Blei, welches ebenfalls möglichst genau einen Längsschnitt durch den Elektromagneten darstellte. Die Platte wurde von der 50 cm darüber befindlichen Röntgen-Röhre ungefähr $2\,^1/_4$ Minute bestrahlt.

Die beigegebene Skizze der erhaltenen Photographie veranschaulicht den Verlauf der Kraftlinien. Die beiden schwarzen Linien längs des Magneten bedeuten die Durchschnittspunkte des sekundären Ringes mit der Ebene des Bildes. Die Richtung der diese Linien in den verschiedenen Höhen schneidenden Kraftlinien ist durch schwarz ausgezogene Pfeile angedeutet.

Die Photographie an sich läßt noch keinen Schluß zu auf die Intensität des Feldes an den verschiedenen Stellen. Um diesen ziehen zu können, hängte ich den sekundären Ring an dem einen Wagebalken einer Wage auf, so daß er verschiedene

h	k_G	φ	K
0	— 2,7	176°	2,71
2,5	— 2,5	155°	2,76
5	— 1,6	125°	2,79
7,5	— 0,6	102°	2,89
10	+ 0,3	83°	2,46
12,5	+ 1,4	52°	2,27
15	+ 1,8	37°	2,25
17,5	+ 2,1	22°	2,25
20	+ 2,25	0°	2,25
22,5	+ 2,0	— 25°	2,20

Höhenlagen über dem Elektromagneten einnehmen konnte. Die Windungen des letzteren sowie der sekundäre Kreis wurden

Digitized by Google

dann mit entgegengesetzt gerichtetem Gleichstrom beschickt und die Abstoßung zwischen beiden Strömen für verschiedene Höhenlagen des sekundären Ringes gemessen.

In der Tabelle S. 5 bezeichnet h die Höhe der Ringlage über dem unteren Ende des Magneten in Zentimetern. k_G ist die an der Wage in Gramm gemessene Abstoßung, und zwar ist sie mit + oder — bezeichnet, je nachdem sie nach oben oder nach unten gerichtet ist.

In die Skizze habe ich für diese verschiedenen Beobachtungslagen die Richtung der Kraftlinien schwarz eingezeichnet. Die Richtung der Kraft, welche auf die Elemente des sekundären Ringes wirkt, ist dann durch die bekannte Linkehandregel bestimmt; sie ist in die Skizze gestrichelt eingezeichnet. Denkt man sich diese Kraft in zwei Komponenten zerlegt, eine in der vertikalen Bewegungsrichtung des Ringes, die andere senkrecht dazu, so wird letztere durch die Festigkeit des Ringes aufgehoben und die erstere, k_G, kann auf obige Weise gemessen werden. In der Tabelle bezeichnet φ den Winkel zwischen der positiven Bewegungsrichtung des Ringes und der Richtung der herrschenden Kraft K, die sich dann aus der gemessenen Komponente k_G gemäß

$$K = \frac{k_G}{\cos \varphi}$$

zu den in der Tabelle angegebenen Werten berechnet und somit einen Schluß auf die mittlere Feldstärke an den verschiedenen Stellen zuläßt. Wir sehen, daß die Intensität des Magnetfeldes am oberen Teil des Elektromagneten nahezu konstant ist; sie steigt dann an bis zu einem Maximum, das ungefähr bei 8,8 liegt, wo die gemessene, zur Wirkung kommende Abstoßung Null wird, und wird nach unten zu wieder geringer.

Beschickte ich nun bei geschlossenem sekundären Stromkreis den primären Kreis mit Wehneltstrom, und maß dann wieder an der Wage die Abstoßung zwischen primärem und sekundärem Strom an den einzelnen Beobachtungspunkten, so zeigte sich, daß die Stelle, an der die zur Geltung kommende Abstoßung Null ist, mit der bei Gleichstrom gefundenen übereinstimmt; die Stellen der maximalen Abstoßung sind jedoch für Wehneltstrom und für Gleichstrom verschieden.

Digitized by Google

h	k_G	k_W	a	$a \cdot k_G$
0	— 2,7	— 3,6	3,8	— 10,26
2,5	— 2,5	— 3,7	4,2	— 10,5
5	— 1,6	— 2,75	5,1	— 7,65
7,5	— 0,6	— 1,1	5,6	— 3,36
10	+ 0,3	+ 1,0	5,2	+ 1,56
12,5	+ 1,4	+ 2,2	5,0	+ 7,0
15	+ 1,8	+ 2,8	4,6	+ 7,8
17,5	+ 2,1	+ 2,8	3,7	+ 7,77
20	+ 2,25	+ 2,3	2,5	+ 5,03

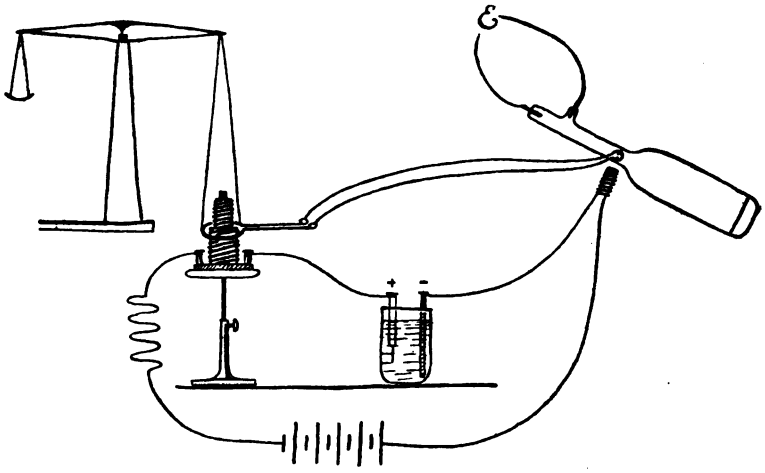
k_W bezeichnet in dieser Tabelle die Abstoßung bei Wehneltstrom, k_G wieder die vorhin bei Gleichstrom gemessene.

Diese Verschiedenheit der Lage der maximalen Abstoßung erklärt sich jedoch leicht daraus, daß auch die Induktion in den verschiedenen Beobachtungslagen eine verschieden große ist, wie sich mit Hilfe der Braunschen Röhre leicht nachweisen läßt. Da ich alle meine Messungen mit Hilfe der letzteren anstellte, will ich gleich hier meine gesamte Versuchsanordnung schildern und skizzieren.

Der primäre Strom konnte so geschaltet werden, daß er außer durch die Windungen des Elektromagneten, dessen Achse vertikal stand, noch durch eine Indikatorspule floß, welche senkrecht unter der Braunschen Röhre angebracht war und den Fluoreszenzfleck horizontal ablenkte. Die Braunsche Röhre, für welche ein Stativ in Form eines Kreuzes gefertigt worden war, wie es ganz ähnlich Simon und Reich*) benutzt haben, mußte in hinreichend großer Entfernung vom Elektromagneten aufgestellt werden, damit eine direkte Einwirkung des letzteren auf das Kathodenstrahlenbündel vermieden wurde. Von den Quecksilbernäpfchen, in welche die Enden des an der Wage aufgehängten sekundären Ringes tauchten, führte ein dicker Draht ebenfalls zur Braunschen Röhre, wo er wieder in einen

*) Physikalische Zeitschrift 2, S. 284—291. 1901.

Digitized by Google



kleineren, fast ganz geschlossenen Ring umgebogen war, so daß die Ebene des Ringes parallel der Röhrenachse war und dieser Indikatorring vertikale Ablenkungen hervorbrachte. Eine sekundäre Indikatorspule mit mehreren Windungen, die ja kräftiger auf die Kathodenstrahlenröhre einwirkte, durfte nicht angebracht werden, da dann die induzierte elektromotorische Kraft nicht mehr genügend starke Ströme im sekundären Kreise hervorbringen konnte, um meßbare Abstoßungen zwischen beiden Stromkreisen zu ermöglichen.

Die Braunsche Röhre wurde durch eine Töplersche Influenzmaschine gespeist, welche von einem Elektromotor gleichmäßig schnell gedreht wurde.

Wie nun bereits von verschiedenen Beobachtern gefunden worden ist, ist die Größe der Ablenkung des Fluoreszenzfleckes in der Braunschen Röhre ziemlich genau der Stromintensität proportional, vorausgesetzt, daß die Indikatorspule keinen Eisenkern enthält. Der Sicherheit halber stellte ich hierüber ebenfalls noch einmal Messungen an, indem ich eine Indikatorspule mit vielen Windungen mit Gleichstrom beschickte und für verschiedene Stromstärken die Ablenkung genau maß. Um genaues Ablesen zu ermöglichen, projizierte ich den leuchtenden Fluoreszenzfleck der Röhre auf eine kleine Glasscheibe, welche

Digitized by Google

in Quadratmillimeter geteilt war. Das Projektionsbild auf diesem Scheibchen wurde dann durch ein Mikroskop beobachtet. Eine im Okular angebrachte Skala gestattete auch noch Bruchteile von den Skalenteilen des Glasscheibchens mit ziemlicher Sicherheit abzulesen.

Ich erhielt folgendes Resultat, das gleichfalls für eine hinreichend genaue Proportionalität zwischen Stromstärke und Ablenkung spricht:

Stromstärke (Amp.)	Ablenkung (Skalenteile)	Stromstärke / Ablenkung
5	2,75	1,82
6	3,29	1,82
7	3,84	1,82
8	4,39	1,82
9	5,0	1,80
10	5,5	1,82
11	6,1	1,80
12	6,63	1,81
13	7,13	1,82
14	7,63	1,83
15	8,25	1,82

Um nun zu erläutern, warum die Lage der maximalen Abstoßung für Wehneltstrom und für Gleichstrom eine verschiedene ist, wie die Tabelle auf Seite 7 zeigt, ließ ich den in den verschiedenen Beobachtungslagen induzierten sekundären Strom auf die Braunsche Röhre einwirken und schrieb die gemessenen, vertikal nach oben gerichteten Ablenkungen des Fluoreszenzfleckes unter a in die Tabelle ein. Die letzte Rubrik derselben, die die Produkte aus dieser Ablenkung und der Abstoßung bei Gleichstrom darstellt, gibt dann ohne weiteres eine Erklärung dafür, daß das Maximum der Abstoßung bei Wehneltstrom an der vorhin gefundenen Stelle liegt. Da nämlich die Abstoßung von dem Produkt der beiden Ströme, oder richtiger von dem

Digitized by Google

Produkt primäre Feldstärke mal Strom im sekundären Ringe abhängt, und bei den Versuchen mit Gleichstrom der Ringstrom stets derselbe war, während er bei den Versuchen mit Wehneltstrom proportional mit a variierte, so muß das Produkt a k_G den gleichen Verlauf wie die Kraftverteilung bei Wehneltstrom zeigen.

Ich ging nun dazu über, für eine bestimmte feste Lage des sekundären Ringes die Größe der Abstoßung in der angegebenen Weise zu messen und diese abstoßende Wirkung aus dem Stromverlauf zu erklären. Als diese feste Lage wählte ich die ungefähr 12,5 cm über dem unteren Ende des Elektromagneten befindliche, da dieser so eingerichtet ist, daß sämtliche Versuche an ihm in dieser Höhe angestellt werden.

Bei allen meinen Messungen mit Wehneltstrom betrug fortan die Spannung im primären Kreise 72 Volt. Die Stromstärke wurde durch einen Vorschaltwiderstand so reguliert, daß alle Versuche für eine an einem eingeschalteten Amperemeter abgelesene primäre Stromstärke von beiläufig 11 Ampere, bei einer zweiten Versuchsreihe für eine solche von 14 Ampere angestellt wurden. Die genaue Einstellung wurde jedesmal mit Hilfe der Braunschen Röhre kontrolliert, deren Fluoreszenzfleck innerhalb jeder Versuchsreihe stets dieselbe Ablenkung erfahren mußte.

Messungen.

Die vermittelst der Wage direkt gemessene Abstoßung zwischen dem primären und dem sekundären Strom gibt uns das Mittel aller während einer Periode wirksamen anziehenden und abstoßenden Momentankräfte. Die Resultate dieser direkten Wägung der mittleren Kraft sind für unsere beiden Fälle:

Primäre maximale Stromstärke	Abstoßung
11 Amp.	0,47 g
14 Amp.	0,95 g

Digitized by Google

Um diese überwiegende Abstoßung zwischen beiden Strömen zu erklären und ihre Größe rechnerisch abzuleiten, ist es nötig, in jedem Augenblick Kenntnis von der Größe der herrschenden Momentankraft zu haben, wozu die Intensität des primären Feldes und des sekundären Stromes bekannt sein muß, da sich ja dann die herrschende Mittelkraft aus

$$k = \frac{C}{T} \int_0^T i_1 \, i_2 \, dt$$

ergeben muß; C ist hierin eine Konstante, T die Periodendauer, i_1 bzw. i_2 die Stärke des primären Feldes bzw. sekundären Stromes.

Zur Messung der momentanen Stromintensitäten wurde wieder die Braunsche Röhre benützt. Wie vorhin gezeigt worden ist, ist die Ablenkung des leuchtenden Fleckes proportional der herrschenden Stromstärke. Es galt daher vor allem, die primäre Indikatorspule und den sekundären Indikatorring zu eichen, d. h. den Proportionalitätsfaktor zu bestimmen, mit dem die jeweilige Ablenkung des Fleckes zu multiplizieren ist, um die zugehörige Stromstärke zu erhalten. Ich beschickte daher zuerst die primäre Indikatorspule mit Gleichstrom und maß für verschiedene Stromstärken die Ablenkung:

Stromstärke (Amp.)	Ablenkung	Stromstärke / Ablenkung
5	1,75	2,85
10	3,62	2,76
15	5,25	2,85
20	7,00	2,85

Diese Tabelle zeigt, daß für die primäre Indikatorspule der mittlere Proportionalitätsfaktor 2,83 gilt.

Für die Eichung des sekundären Indikatorringes durch Gleichstrom erhielt ich folgende Tabelle:

Digitized by Google

Stromstärke (Amp.)	Ablenkung	Stromstärke / Ablenkung
29,5	0,63	47,5
35	0,74	47,3
41	0,87	47,9
44	0,93	47,7

Der mittlere Proportionalitätsfaktor betrug also für den sekundären Indikatorring 47,6.

Es ist zunächst von Interesse, hieraus zu ersehen, ein wie starker Maximalstrom eigentlich in dem sekundären Stromkreise durch Induktion entsteht. Ich maß dazu die durch den sekundären Strom hervorgerufene Ablenkung des Fluoreszenzfleckes in der Röhre und fand:

Bei einer maximalen primären Stromstärke von ca. 11 Amp. wurde der Fluoreszenzfleck durch den sekundären Strom um 2,8 Skalenteile nach oben, um 0,3 Skalenteile nach unten abgelenkt. Der induzierte Strom erreicht also in diesem Falle eine Stärke von

$$2{,}8 \cdot 47{,}6 = 133{,}3 \text{ Amp. nach der positiven}$$

und eine Stärke von

$$0{,}3 \cdot 47{,}6 = 14{,}2 \text{ Amp. nach der neg. Richtung.}$$

Bei 14 Amp. maximaler, primärer Stromstärke wurde der Fluoreszenzfleck durch den sekundären Strom um 4,0 Skalenteile nach oben und um 0,5 Skalenteile nach unten abgelenkt. Der induzierte Strom wächst also jetzt an bis zu dem Maximum

$$4{,}0 \cdot 47{,}6 = 190{,}4 \text{ Amp.}$$

und fällt dann bis zur negativen Stärke von

$$0{,}5 \cdot 47{,}6 = 23{,}8 \text{ Amp.}$$

Wir haben also folgende Übersicht über die ungefähren maximalen Stromstärken im primären und sekundären Kreise:

Primärstrom	Sekundärstrom	
	pos.	neg.
11 Amp.	133,3 Amp.	14,2 Amp.
14 Amp.	190,4 Amp.	23,8 Amp.

Digitized by Google

Um die zusammengehörigen Momentanstärken des primären und sekundären Stromes zu erhalten, müssen beide Stromkurven in ihrem zeitlichen Zusammenfallen genau bekannt sein.

Läßt man die primäre Indikatorspule oder den sekundären Indikatorring einzeln auf die Braunsche Röhre wirken, so erblickt man im rotierenden Spiegel, dessen Achse natürlich im ersteren Falle horizontal, im letzteren vertikal sein muß, die bekannten Stromkurven, wie sie ungefähr in den folgenden Figuren für den primären und sekundären Strom aufgezeichnet sind.

Fig. 3.

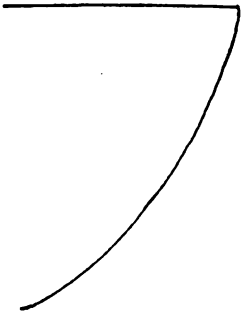
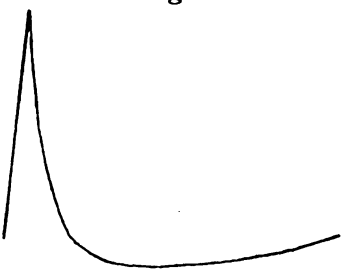


Fig. 4.



Es galt nun, diese Kurven und ihr zeitliches Zusammenfallen genau zu bestimmmen. Dies geschah, indem ich in der nachher beschriebenen Weise eine der beiden, z. B. die einfachere primäre Stromkurve, genau ausmaß; dann ließ ich den primären und sekundären Strom zugleich auf die Braunsche Röhre wirken und bestimmte aus dem entstehenden resultierenden Kurvenzug und der gemessenen primären Kurve den Verlauf des sekundären Stroms während einer Periode.

Um die primäre Stromkurve genau aufzeichnen zu können, befestigte ich eine belegte Spiegelscheibe direkt auf der Achse eines kleinen Elektromotors. Seine Umdrehungsgeschwindigkeit wurde so reguliert, daß ich das Bild der Stromkurve im rotierenden Spiegel immer an derselben Stelle sah. Dieses Bild wurde dann durch eine starke Linse auf eine Mattglasscheibe projiziert, auf welcher eine Koordinatenteilung aufgezeichnet war. Auf diese Weise wurden möglichst viele

Digitized by Google

Punkte der Kurve bestimmt und diese selbst gezeichnet, wie sie die Figuren 5 und 6 für die betrachteten beiden Fälle (11 und 14 Amp. maximale Stromstärke) darstellen. Die Größen

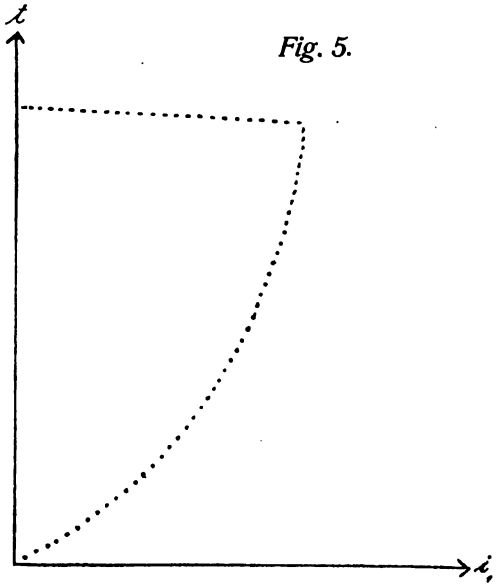


Fig. 5.

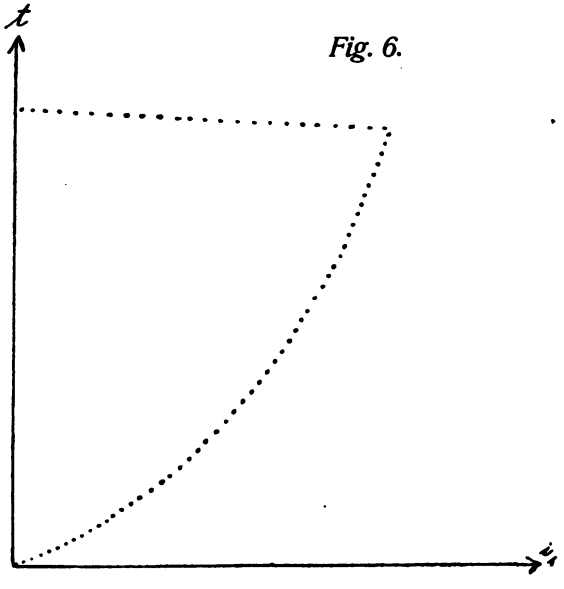


Fig. 6.

Digitized by Google

der die Stromintensitäten darstellenden Abszissen wurden so reduziert, daß die maximale Stromstärke in Fig. 5 durch eine 3,8 Einheiten lange Strecke, in Fig. 6 durch eine 5 Einheiten lange Strecke gegeben ist, wie sich diese Größe der maximalen Ablenkung bei der Projektion auf das Millimeternetz ergeben hatte. Die primäre Stromstärke ist mithin jetzt zu jeder beliebigen Zeit fest bestimmt. Man hat nur die zu jener Zeit gehörige Abszisse mit dem vorhin bestimmten Proportionalitätsfaktor 2,83 zu multiplizieren. Wirkten die primäre Indikatorspule und der sekundäre Indikatorring gleichzeitig auf die Kathodenstrahlenröhre ein, so waren auf dem leuchtenden Schirm eigentümliche Kurven zu erblicken, wie sie in den Figuren 7 und 8 für unsere beiden betrachteten Fälle gezeichnet sind. Es wurde auch hier wieder eine große

Fig. 7.

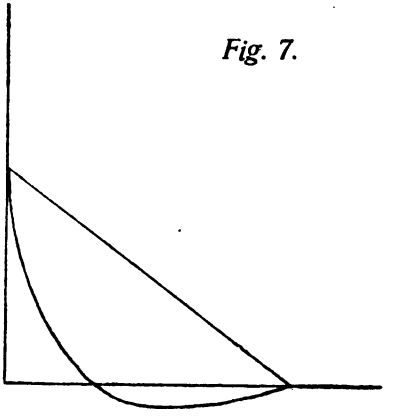
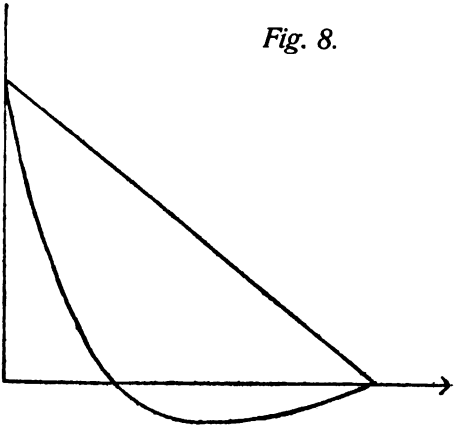


Fig. 8.



LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

Anzahl von Kurvenpunkten bestimmt, indem ich die Kurve in der oben S. 8 geschilderten Weise auf das Millimeternetz projizierte und dann durch das Mikroskop beobachtete.

Um die Rekonstruktion der sekundären Stromkurve aus einer solchen resultierenden und der zugehörigen primären Stromkurve recht deutlich zu machen, will ich zunächst diese Rekonstruktion für einen besonders einfachen Fall durchführen.

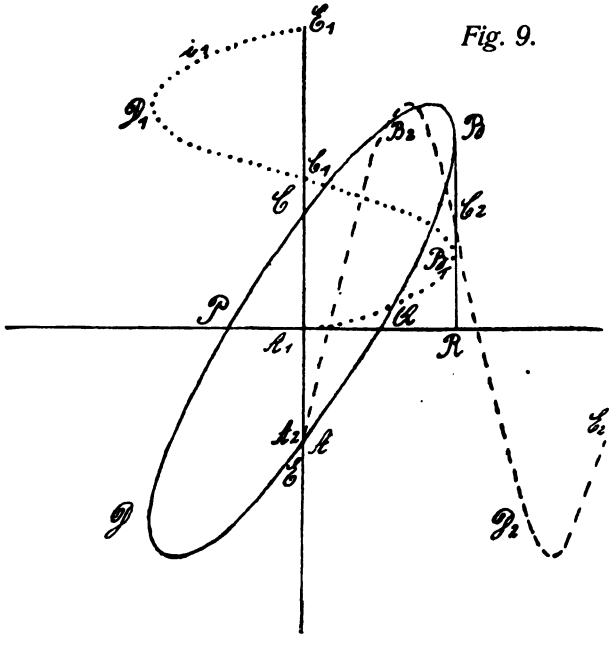


Fig. 9.

In Fig. 9 mögen die punktiert und gestrichelt gezeichneten Kurven zwei sinusförmig verlaufende Ströme darstellen, von denen der sekundäre, gestrichelt gezeichnete in der Phase um 30° zurückbleibe. Bekanntlich setzen sich dann beide Schwingungen zusammen zu einer Ellipse, die in unserer Figur schwarz ausgezeichnet ist. Wir nehmen an, daß die punktierte, primäre Stromkurve und die resultierende Ellipse in ihrem Verlaufe bekannt sind, und es soll aus diesen beiden der Verlauf der sekundären Kurve abgeleitet werden.

Wir sehen, daß sich die Punkte der resultierenden Kurve aus denjenigen Punkten der Einzelkurven zusammensetzen, die

Digitized by Google

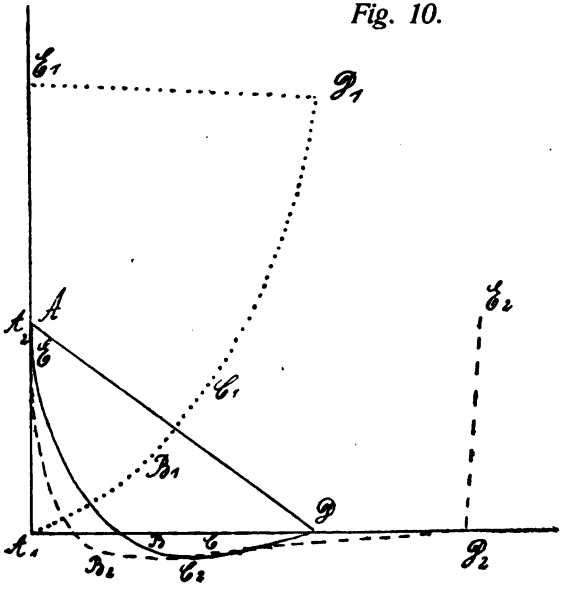
gleiche Phase besitzen; jeder resultierende Kurvenpunkt hat dieselbe Abszisse i_1 und dieselbe Ordinate i_2, wie die zugehörigen phasengleichen primären und sekundären Kurvenpunkte.

Wir nehmen noch die positive Fortschreitungsrichtung der Ellipse so, daß die eingeschlossene Fläche immer zur Linken liegt.

Zu Beginn des gesamten Vorganges wird die primäre Stromstärke dargestellt durch die Abszisse 0 des Punktes A_1. Zu ihm gehört, da der sekundäre Strom in der Phase zurückbleibt, Punkt A der Ellipse. Zu Beginn des Vorganges, also zur Zeit $t = 0$, muß mithin der sekundäre Strom dargestellt sein durch den Punkt A_2, der die gleiche Ordinate hat wie A.

Nach einer Viertelperiode stellt die Abszisse von B_1 die primäre Stromstärke dar. Ihm entspricht Punkt B der Ellipse und mithin gibt nach einer Viertelperiode die Ordinate des Punktes B_2 die sekundäre Stromstärke. Ebenso entsprechen sich nach einer halben Periode die Punkte C_1, C, C_2, nach drei Viertelperioden die Punkte D_1, D, D_2 und nach einer ganzen Periode E_1, E, E_2. Wir können mithin aus primärer und

Fig. 10.

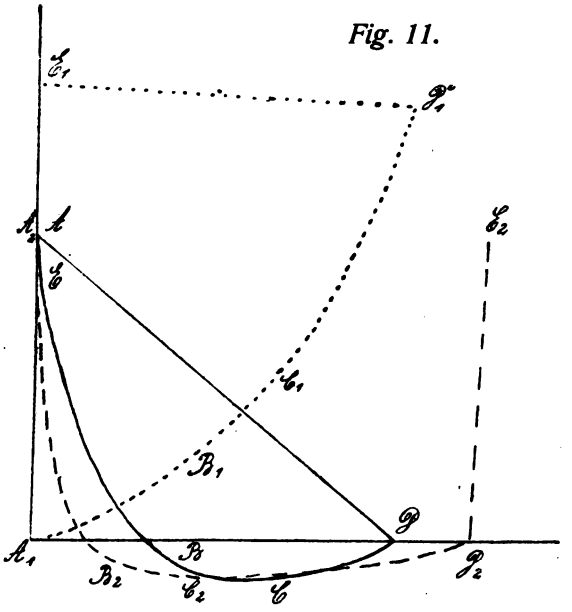


Digitized by Google

resultierender Kurve beliebig viele Punkte der sekundären Kurve finden und daher diese selbst konstruieren.

In genau derselben Weise konstruieren wir jetzt aus Fig. 5 und 7 sowie aus Fig. 6 und 8 die zugehörigen sekundären Stromkurven. (Fig. 10 und 11.) Die beobachtete primäre Kurve ist punktiert, die beobachtete resultierende schwarz und die aus beiden gefundene sekundäre Kurve gestrichelt gezeichnet.

Fig. 11.



In Fig. 10 z. B. entspricht zur Zeit $t = 0$ dem primären Kurvenpunkte A_1 der resultierende Kurvenpunkt A und mithin der sekundäre Kurvenpunkt A_2. Zur Zeit $t = \frac{T}{6}$ entsprechen sich die Punkte B_1 und B; nach dieser Zeit muß also der sekundäre Strom dargestellt sein durch Punkt B_2. Nach der Zeit $t = \frac{2T}{6}$ entsprechen sich die Punkte C_1, C, C_2 usf. Es ergibt sich also als Verlauf des sekundären Stromes in diesem Falle die gestrichelt gezeichnete Kurve.

Genau ebenso erhalten wir in Fig. 11 die gestrichelt gezeichnete sekundäre Stromkurve für unseren zweiten Fall (14 Amp. primäre Maximalstromstärke).

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

In Fig. 12 und 14 endlich sind die primären und sekundären Stromkurven so eingezeichnet, daß die Ordinaten jedesmal die Stromstärken, gemessen in Millimeter der Ablenkung des Fluoreszenzfleckes, angeben, die zu den durch die entsprechenden Abszissen dargestellten Zeiten gehören.

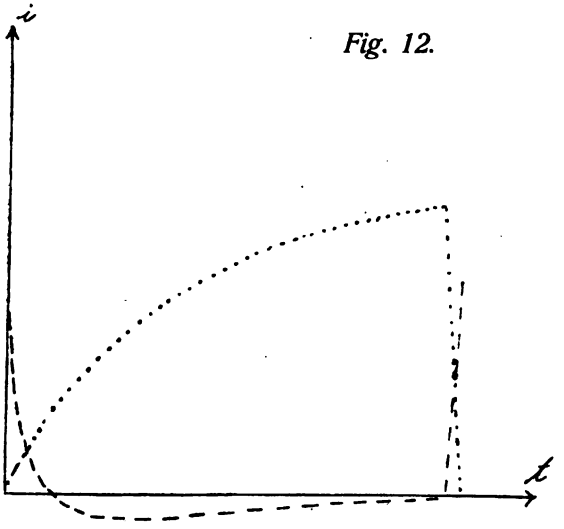


Fig. 12.

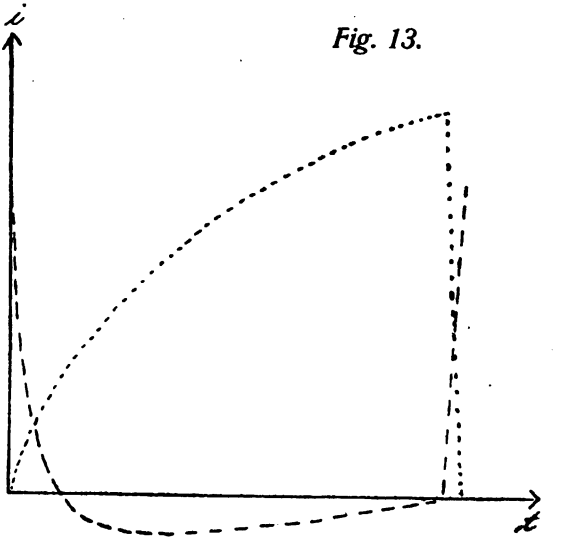


Fig. 13.

Digitized by Google

Während also der primäre Strom langsam von Null bis zu seinem Maximum ansteigt, fällt die sekundäre Stromstärke sehr plötzlich und schnell von ihrem Maximum bis unter Null ab, um dann ganz langsam bis Null wieder anzusteigen. Dem raschen und steilen Abfall des primären Stromes nach der Unterbrechung vom Maximum bis Null entspricht ein steiler Anstieg des sekundären Stromes von Null bis zu seinem Maximum.

Die vorhin vermittelst der Wage gemessene Abstoßung des sekundären Ringes muß sich ergeben als das Mittel aller während einer Periode wirksamen Momentankräfte. Jede dieser Momentankräfte ist proportional dem Produkt aus der augenblicklichen primären Feldstärke und der zugehörigen sekundären Stromstärke. Da die primäre Feldstärke des Eisenkerns wegen nicht ohne weiteres proportional der primären Stromstärke gesetzt werden kann, so dürfen wir auch die Momentankräfte nicht einfach dem Produkt der momentanen Stromstärken proportional setzen, sondern wir müssen uns erst darüber klar werden, wie sich das primäre Feld bei gegebener Änderung der Stromstärke ändert. Bevor wir also dazu übergehen können, durch Ausmessung unserer Stromkurven in

		i_1						
	Amp.	6	8	10	12	13	14	15
i_2	5	0,20	0,28	0,43	0,50	0,52	0,55	0,60
	8	0,32	0,50	0,68	0,77	0,90	0,95	0,98
	10	0,50	0,77	0,90	1,07	1,15	1,22	1,30
	12	0,65	0,88	1,07	1,25	1,32	1,48	1,59
	13	0,70	0,92	1,17	1,35	1,52	1,57	1,69
	14	0,77	1,05	1,23	1,55	1,65	1,75	1,85
	15	0,85	1,10	1,32	1,62	1,73	1,90	2,10

Fig. 12 und 13 die Momentankräfte zu finden, ist noch die Frage zu beantworten, ob in allen Fällen der Proportionalitätsfaktor, von dem vorhin die Rede war, der gleiche bleibt oder ob er

Digitized by Google

bei verschiedenen Stromstärken verschieden groß ist. Um dies zu ermitteln, beschickte ich beide Stromkreise mit Gleichstrom, dessen Intensität beliebig geändert und an Amperemetern abgelesen werden konnte. Die vorstehende Tabelle gibt dann die zu den einzelnen Stromstärken i_1 und i_2 gehörigen Kräfte, wie sie an der Wage gemessen wurden.

Hieraus berechnete ich das Verhältnis jeder Kraft zum Produkt der zugehörigen Stromintensitäten; diese Verhältniszahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

		i_1						
	Amp.	6	8	10	12	13	14	15
i_2	5	0,0066	0,0070	0,0086	0,0083	0,0080	0,0079	0,0080
	8	0,0066	0,0078	0,0085	0,0086	0,0086	0,0085	0,0081
	10	0,0083	0,0088	0,0090	0,0089	0,0088	0,0087	0,0087
	12	0,0090	0,0091	0,0089	0,0087	0,0086	0,0088	0,0088
	13	0,0089	0,0089	0,0090	0,0090	0,0089	0,0087	0,0088
	14	0,0091	0,0092	0,0089	0,0090	0,0090	0,0089	0,0089
	15	0,0092	0,0091	0,0088	0,0090	0,0089	0,0090	0,0093

Wir sehen, daß der Proportionalitätsfaktor im allgemeinen einen ziemlich konstanten Wert besitzt; nur wenn beide Stromstärken zugleich sehr gering sind, ist er ebenfalls etwas kleiner. Wie jedoch die Tabellen auf Seite 23 und 24 zeigen, welche die zusammengehörigen primären und sekundären Stromstärken enthalten, sind i_1 und i_2 nur in ganz wenig Fällen gleichzeitig so klein, daß der Proportionalitätsfaktor von dem ungefähren konstanten Werte merklich abweichen würde. Wir werden daher mit für unsere Zwecke hinreichender Genauigkeit rechnen, wenn wir in der Formel auf S. 11 als Maß der primären Feldstärke direkt die primäre Stromstärke annehmen und den als konstant anzusehenden Proportionalitätsfaktor

$$C = 0{,}0089.$$

setzen.

Digitized by Google

Nun können wir rechnerisch direkt aus den Kurven 12 und 13 die Kraft finden, welche auf den sekundären Ring wirkt.

Wir teilen die Zeit von 0 bis T ein in eine Anzahl, z. B. 30, gleicher Teilintervalle und nehmen für jedes Teilintervall aus unseren Stromkurven die Mittelwerte der zusammengehörigen Ordinaten. Diese 30 Paare zusammengehöriger Ordinaten sind in den beiden folgenden Tabellen unter y_1 und y_2 enthalten, und zwar entspricht die erste Tabelle auf Seite 23 der Fig. 12, die zweite Tabelle Seite 24 der Fig. 13. Durch Multiplikation jeder Ordinate bzw. mit den früher gefundenen Proportionalitätsfaktoren 2,83 und 47,6 erhalten wir die entsprechenden Mittelwerte i_1 und i_2 der Stromstärken in jedem Teilintervall, wie sie ebenfalls in den Tabellen angegeben sind. Die letzte Rubrik endlich enthält die zusammengehörigen Produkte $(i_1\ i_2)$.

Die während einer Periode wirkende Mittelkraft k muß sich dann ergeben aus

$$k = \frac{C}{30} \cdot \Sigma\,(i_1\ i_2).$$

Wie sowohl die Figuren als die Tabellen zeigen, überwiegt in beiden Fällen die Abstoßung zeitlich ganz enorm über die Anziehung.

Aus der ersten der beiden Tabellen erhalten wir

$$k = -\frac{0{,}0089}{30} \cdot 1404{,}7$$
$$= -\,0{,}42.$$

Die direkte Wägung hatte (vgl. S. 10) zu dem Wert

$$k = -\,0{,}47$$

geführt. Die zweite Tabelle ergibt

$$k = -\frac{0{,}0089}{30} \cdot 2887$$
$$= -\,0{,}86.$$

Für diesen Fall hatten wir durch die Wägung den Wert

$$k = -\,0{,}95$$

erhalten. Die beschriebene Synthese führt also offenbar auf Mittelwerte für die Gesamtkraft, die den direkt beobachteten Werten dieser Kraft ziemlich gut entsprechen.

Digitized by Google

Ausmessung von Fig. 12.

Teil-intervall	y_1	y_2	i_1	i_2	$i_1 \cdot i_2$
1	0,23	1,20	0,6	57,3	34,4
2	0,60	0,40	1,6	19,0	30,4
3	0,95	0,05	2,5	2,4	6,0
4	1,25	— 0,10	3,5	— 4,6	— 16,1
5	1,50	— 0,18	4,2	— 8,4	— 37,3
6	1,70	— 0,25	4,8	— 11,9	— 57,1
7	1,90	— 0,25	5,4	— 13,8	— 74,6
8	2,10	— 0,30	5,9	— 14,3	— 85,8
9	2,25	— 0,30	6,3	— 14,3	— 90,1
10	2,35	— 0,30	6,6	— 14,3	— 95,0
11	2,5	— 0,30	7,1	— 14,3	— 100,0
12	2,6	— 0,30	7,3	— 14,3	— 103,0
13	2,75	— 0,30	7,7	— 14,3	— 107,9
14	2,85	— 0,25	8,0	— 13,3	— 106,4
15	2,95	— 0,20	8,3	— 12,0	— 100,6
16	3,05	— 0,20	8,6	— 10,7	— 94,9
17	3,15	— 0,20	8,8	— 9,7	— 89,4
18	3,25	— 0,20	9,1	— 9,5	— 86,5
19	3,30	— 0,15	9,4	— 8,1	— 76,1
20	3,40	— 0,15	9,5	— 7,2	— 68,4
21	3,45	— 0,10	9,7	— 5,9	— 57,3
22	3,50	— 0,10	9,8	— 5,2	— 51,0
23	3,55	— 0,10	9,9	— 4,6	— 48,5
24	3,60	— 0,07	10,1	— 3,6	— 41,4
25	3,65	— 0,07	10,2	— 3,6	— 30,6
26	3,70	— 0,05	10,4	— 2,3	— 23,9
27	3,70	— 0,05	10,4	— 2,3	— 23,9
28	3,75	— 0,03	10,5	— 1,5	— 15,8
29	3,80	— 0,02	10,7	— 0,8	— 8,6
30	1,90	+ 0,90	5,3	+ 40,5	+ 214,7

$$\Sigma\,(i_1\,i_2) = -1404{,}7.$$

Digitized by Google

Ausmessung von Fig. 13.

Teil-intervall	y_1	y_2	i_1	i_2	$i_1 \cdot i_2$
1	0,25	1,75	0,6	83,3	50,0
2	0,75	0,90	2,1	42,8	89,8
3	1,15	0,35	3,2	16,7	53,4
4	1,45	0	4,1	0	0
5	1,75	— 0,25	4,9	— 11,9	— 58,3
6	2,05	— 0,35	5,7	— 16,7	— 95,2
7	2,30	— 0,45	6,4	— 21,4	— 137,0
8	2,50	— 0,50	7,0	— 23,8	— 166,6
9	2,75	— 0,50	7,7	— 23,8	— 183,3
10	2,90	— 0,50	8,1	— 23,8	— 192,8
11	3,10	— 0,50	8,7	— 23,8	— 207,1
12	3,30	— 0,50	9,2	— 23,8	— 219,0
13	3,45	— 0,50	9,7	— 23,8	— 230,9
14	3,60	— 0,45	10,1	— 21,4	— 216,1
15	3,70	— 0,45	10,4	— 21,4	— 222,6
16	3,90	— 0,40	10,9	— 19,0	— 207,1
17	4,00	— 0,40	11,2	— 19,0	— 212,8
18	4,10	— 0,35	11,5	— 17,4	— 200,1
19	4,20	— 0,30	11,8	— 15,9	— 187,8
20	4,35	— 0,30	12,2	— 14,3	— 174,5
21	4,40	— 0,25	12,3	— 11,9	— 166,4
22	4,50	— 0,23	12,6	— 10,7	— 134,8
23	4,60	— 0,20	12,9	— 9,5	— 122,6
24	4,70	— 0,17	13,2	— 8,3	— 109,6
25	4,75	— 0,15	13,3	— 7,1	— 94,4
26	4,85	— 0,13	13,6	— 6,7	— 91,2
27	4,90	— 0,09	13,7	— 4,3	— 58,9
28	4,95	— 0,05	13,9	— 2,9	— 40,4
29	5,00	— 0,03	14,2	— 1,2	— 17,1
30	2,5	2	7,0	+ 95,2	+ 666,4
				$\Sigma (i_1 i_2) = -2887.$	

Digitized by Google

Theoretischer Teil.

Die rein theoretische Behandlung der Fragen, die im vorigen Teil durch Auswertung der quantitativen Messungen beantwortet wurden, bietet, wie bereits in der Einleitung angedeutet wurde, keinerlei Schwierigkeiten für Ströme und Felder, die nach einem einfachen Gesetze variieren.

Ändert sich z. B. das primäre Feld rein sinusförmig,

$$x = i_1 = p \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so ist der Momentanwert der induzierten Spannung

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt},$$

wo M und L_2 die Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion im sekundären Kreise sind. Setzen wir:

$$\frac{w_2}{L_2} = b_2 \text{ und } \frac{M}{L_2} = \varepsilon,$$

so lautet die Differentialgleichung des sekundären Stromes

$$\frac{di_2}{dt} + b_2 i_2 = -\varepsilon \frac{2\pi p}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Multiplizieren wir mit $e^{b_2 t}$, so erhalten wir durch Integration

$$i_2 . e^{b_2 t} = -\varepsilon \frac{2\pi p}{T} \frac{e^{b_2 t}}{b_2^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \left(b_2 \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) + c$$

oder

$$i_2 = -\varepsilon p \frac{2\pi T}{b_2^2 T^2 + 4\pi^2} \left(b_2 \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) + c . e^{-b_2 t}$$

worin c eine Integrationskonstante ist.

Nach hinreichend langer Zeit von Beginn des gesamten Vorganges an gerechnet wird natürlich auch der sekundäre Stromverlauf zu einem rein periodischen; die Größe $e^{-b_2 t}$

Digitized by Google

wird dann nämlich so verschwindend klein, daß die Vernachlässigung von $c \cdot e^{-b_2 t}$ keinen wesentlichen Fehler mehr ausmacht. Setzen wir dann noch

$$\frac{w_2 T}{2 \pi L_2} = \operatorname{tang} \delta,$$

so ist der sekundäre Strom dargestellt durch

$$y = i_2 = q \cdot \sin\left(\frac{2 \pi t}{T} + \delta\right),$$

wo $q = -2 \pi p \dfrac{M}{\sqrt{4 \pi^2 L_2^2 + w_2^2 T^2}}$ die Amplitude, δ die Phasenverschiebung bedeutet.

Sind dann die beiden Amplituden p und q, sowie der Phasenwinkel δ gemessen, was ja mit Hilfe der Braunschen Röhre keine Schwierigkeit bietet, so können wir ohne weiteres die Kraft, mit der i_1 und i_2 aufeinanderwirken, berechnen aus der Formel

$$k = \frac{C}{T} \int_0^T i_1 \, i_2 \cdot dt,$$

in der wieder T die Periodendauer bedeutet, während C als Konstante angesehen werden darf. Wir erhalten

$$\begin{aligned} k &= \frac{C}{T} p q \int_0^T \sin \frac{2 \pi t}{T} \cdot \sin\left(\frac{2 \pi t}{T} + \delta\right) \cdot dt \\ &= \frac{C}{T} p q \cos \delta \int_0^T \sin^2 \frac{2 \pi t}{T} dt + \frac{C}{T} p q \sin \delta \int_0^T \sin \frac{2 \pi t}{T} \cos \frac{2 \pi t}{T} \cdot dt \\ &= \frac{C}{2} p q \cdot \cos \delta \\ &= -2 C \pi^2 p^2 \frac{M L_2}{4 \pi^2 L_2^2 + w_2^2 T^2}. \end{aligned}$$

Ebenso stoßen wir auf keine Schwierigkeit bei der Berechnung der Kurve, die aus der primären und sekundären Stromkurve resultiert, und wir können daher dann auch leicht untersuchen, in welcher Beziehung die von dieser resultierenden Kurve eingeschlossene Fläche zu der soeben berechneten Kraft k steht.

Digitized by Google

Durch Elimination von t aus den Gleichungen für i_1 und i_2 ergibt sich

$$y = \frac{q}{p} \cos\delta \,.\, x \pm \frac{q}{p} \sin\delta \,.\, \sqrt{p^2 - x^2}$$

oder

$$p^2 y^2 - 2\, p\, q \cos\delta \,.\, x\, y + q^2 \cos^2\delta \,.\, x^2 = p^2 q^2 \sin^2\delta - q^2 \sin^2\delta \,.\, x^2$$

oder schließlich

$$q^2 x^2 + p^2 y^2 - 2\, p\, q \cos\delta \,.\, x\, y = p^2 \,.\, q^2 \,.\, \sin^2\delta.$$

Die resultierende Kurve ist also im allgemeinen eine Ellipse, außer für $\delta = n\,\pi$, wo sie in eine Gerade übergeht. (Vgl. Fig. 9.)

Die Durchschnittspunkte P, Q der Ellipse mit der x-Achse sind gegeben durch

$$x = \pm\, p \sin\delta.$$

Den halben Flächeninhalt F der Ellipse erhalten wir dann als die Differenz der beiden Flächenstücke

$$F_1 = P\,C\,B\,R$$

und

$$F_2 = Q\,B\,R,$$

so daß

$$\frac{F}{2} = F_1 - F_2 = \int_{-p\sin\delta}^{+p} y \,.\, dx - \int_{+p\sin\delta}^{+p} y \,.\, dx$$

wird, wo beim ersten Integral der Wert

$$y = \frac{q}{p} \cos\delta \,.\, x + \frac{q}{p} \sin\delta \,.\, \sqrt{p^2 - x^2},$$

beim zweiten der Wert

$$y = \frac{q}{p} \cos\delta \,.\, x - \frac{q}{p} \sin\delta \sqrt{p^2 - x^2}$$

zu nehmen ist.

Wir erhalten

$$F_1 = \int_{-p\sin\delta}^{p} \frac{q}{p} \cos\delta \,.\, x\, dx + \int_{-p\sin\delta}^{p} \frac{q}{p} \sin\delta \,.\, \sqrt{p^2 - x^2} \,.\, dx$$

$$= \frac{q}{p} \cos\delta \,.\, \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\cdot} + \frac{q}{p} \sin\delta \,.\, \left[\frac{p^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]_{\varphi = -\delta}^{\varphi = \frac{\pi}{2}},$$

Digitized by Google

indem $x = p \cdot \sin \varphi$

gesetzt wurde. Mithin wird

$$F_1 = \frac{p\,q}{2} \cdot \cos^2 \delta + \pi \frac{p\,q}{4} \cdot \sin \delta + \frac{p\,q\,\delta}{2} \sin \delta + \frac{p\,q}{4} \sin \delta \cdot \sin 2\,\delta.$$

Ebenso wird

$$F_2 = \frac{p\,q}{2} \cos^2 \delta - \pi \frac{p\,q}{4} \sin \delta + \frac{p\,q\,\delta}{2} \sin \delta + \frac{p\,q}{4} \sin \delta \cdot \sin 2\,\delta.$$

Hieraus ergibt sich der Flächeninhalt der Ellipse zu

$$F = \pi\, p\, q \cdot \sin \delta,$$

oder, indem die Werte von q und sin δ eingesetzt werden,

$$F = -2\,\pi^2\, p^2\, T \frac{M\, w_2}{4\,\pi^2 L_2^2 + w_2^2 T^2}.$$

Für die Kraft hatten wir gefunden

$$k = \frac{C}{2}\, p\, q \cos \delta = -2\, C\, \pi^2\, p^2 \frac{M\, L_2}{4\,\pi^2 L_2^2 + w_2^2 T^2},$$

so daß sich folgende Beziehung zwischen F und k ergibt:

$$\frac{F^2}{\pi^2 p^2 q^2} + \frac{4\,k^2}{C^2 p^2 q^2} = 1.$$

$\pi\, p\, q$ stellt nun die Größe der maximalen Fläche, $C \cdot \frac{p\,q}{2}$ die Größe der maximalen Kraft im günstigsten Falle dar. Bezeichnen wir daher mit ψ das Verhältnis der Fläche bei der Phasenverschiebung δ zur maximalen Fläche bei der Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$, ferner mit γ das Verhältnis der bei der Phasenverschiebung δ wirkenden Kraft zur maximalen bei der Phasenverschiebung $n\,\pi$, so drückt sich unsere obige Beziehung aus durch

$$\psi^2 + \gamma^2 = 1.$$

Weit schwieriger wird eine solche theoretische Behandlung natürlich bei so komplizierten Stromschwingungen wie die, über welche ich meine Messungen angestellt habe. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß der primäre Strom durch eine gebrochene Kurve dargestellt ist, sein Verlauf also nicht durch eine einzige, endliche Gleichung, sondern nur durch zwei verschiedene Gleichungen angegeben werden kann.

Digitized by Google

Bezeichnen wir die Zeit vom Momente des Stromschlusses bis zur Unterbrechung des primären Stromes mit T_1, die gesamte Periodendauer mit T, so daß also $T—T_1$ die Zeit vom Momente der Unterbrechung bis zum abermaligen Stromschluß ist, so haben wir, wenn die Rückwirkung des sekundären Stromes auf den primären vernachlässigt wird. für den primären Stromverlauf in der ersten Phase, also für

$$0 \leqq t \leqq T_1$$

den bekannten Helmholtzschen Ausdruck

$$i_1 = \frac{E_1}{w_1}\left(1 - e^{-\frac{w_1}{L_1}t}\right)$$

oder

$$(1.) \qquad i_1 = a_1\left(1 - e^{-b_1 t}\right),$$

indem

$$a_1 = \frac{E_1}{w_1}, \qquad b_1 = \frac{w_1}{L_1}$$

gesetzt ist. Zur Rechtfertigung der vorgenommenen Vernachlässigung sei bemerkt, daß die primäre Stromkurve keine meßbaren Veränderungen zeigte, wenn der sekundäre Ring offen oder geschlossen war.

E_1, w_1, L_1 haben die übliche Bedeutung für Spannung, Ohmschen Widerstand und Selbstinduktion.

In der zweiten Phase, d. h. für

$$T_1 \leqq t \leqq T$$

kann die Gleichung für den primären Strom in der Form

$$(2.) \qquad i_1 = \frac{I_1}{T - T_1}\left(T - t\right)$$

angesetzt werden, wo I_1 die zur Zeit T_1 erreichte primäre Maximalstromstärke ist.

Die Resultate des experimentellen Teils zeigen uns einen Weg, den Verlauf des sekundären Stroms ebenfalls durch zwei Gleichungen auszudrücken und so dessen Verlauf auch mathematisch zu formulieren.

Die Messungen hatten nämlich ergeben, daß dem primären Schließungsstrom der Abfall des induzierten Stromes von seinem Maximum I_2 bis unter Null und dann ein langsamer Anstieg

Digitized by Google

wieder bis nahe an Null entspricht, während zu dem raschen, linearen Abfall des Primärstromes der rasche, lineare Anstieg des sekundären Stromes gehört.

Wir können daher diese beiden sekundären Kurvenzweige getrennt mathematisch formulieren:

Durch den primären Schließungsstrom

$$i_1 = a_1 \left(1 - e^{-b_1 t}\right)$$

wird in dem sekundären Stromkreise eine elektromotorische Kraft

$$e_2 = - M \frac{di_1}{dt}$$

induziert, wo M den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Kreise bedeutet. Nun ist

$$\frac{di_1}{dt} = a_1 b_1 e^{-b_1 t}.$$

Mithin lautet, wenn wieder

$$b_2 = \frac{w_2}{L_2}, \qquad \varepsilon = \frac{M}{L_2}$$

gesetzt wird und L_2 die Selbstinduktion des sekundären Kreises bedeutet, die Differentialgleichung des sekundären Stromes in der ersten Phase

$$i_2 w_2 = - a_1 b_1 M e^{-b_1 t} - L_2 \frac{di_2}{dt},$$

oder

$$\frac{di_2}{dt} + b_2 i_2 = - a_1 b_1 \varepsilon e^{-b_1 t}.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$e^{b_2 t},$$

so wird

$$\frac{d}{dt}\left(i_2 e^{b_2 t}\right) = - a_1 b_1 \varepsilon e^{(b_2 - b_1) t}.$$

Beachten wir, daß

$$i_2 = I_2$$

wird für

$$t = 0,$$

Digitized by Google

so erhalten wir durch Integration zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$

$$i_2 e^{b_2 t} - I_2 = - \frac{a_1 b_1 \varepsilon}{b_2 - b_1} \left[e^{(b_2 - b_1) t} - 1 \right],$$

und mithin als Gleichung für den sekundären Stromverlauf in der ersten Phase

$$(3.) \quad i_2 = I_2 e^{- b_2 t} - \frac{a_1 b_1 \varepsilon}{b_2 - b_1} \left(e^{- b_1 t} - e^{- b_2 t} \right).$$

Unsere Resultate vom vorigen Teile zeigen ferner, daß in der zweiten Phase der sekundäre Strom nahezu linear von einem nur wenig unter Null liegenden Werte zu seinem Maximum $+ I_2$ ansteigt. Sein Verlauf während dieser Zeit

$$T_1 \leqq t \leqq T$$

muß sich also durch eine Gleichung von der Form

$$(4.) \qquad i_2 = \frac{I_2}{T - T_1} \left(t - T_1 \right)$$

angeben lassen.

Nun ist ja die in der zweiten Phase vom primären Strom

$$i_1 = \frac{I_1}{T - T_1} \left(T - t \right)$$

im sekundären Kreise induzierte elektromotorische Kraft

$$e_2 = - M \frac{di_1}{dt}$$

$$= \frac{M I_1}{T - T_1},$$

so daß die Differentialgleichung des sekundären Stromes in dieser Phase wird

$$\frac{di_2}{dt} + b_2 i_2 = \varepsilon \frac{I_1}{T - T_1}.$$

Wir multiplizieren wieder mit

$$e^{b_2 t}$$

und berücksichtigen, daß für

$$t = T_1 \quad \text{mit großer Annäherung}$$
$$i_2 = 0$$

Digitized by Google

wird. Dann erhalten wir durch Integration zwischen den Grenzen T_1 und t

$$i_2 e^{b_2 t} = \frac{\varepsilon}{b_2} \frac{I_1}{T - T_1} \left(e^{b_2 t} - e^{b_2 T_1} \right),$$

und mithin hieraus

$$(5.) \qquad i_2 = \frac{\varepsilon}{b_2} \frac{I_1}{T - T_1} \left(1 - e^{b_2 (T_1 - t)} \right).$$

Von dieser Kurve gibt die Beobachtung in der Zeit von T_1 bis T nur den ersten, nahezu linearen Anstieg. Bilden wir nämlich $\frac{di_2}{dt}$, so erhalten wir

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\varepsilon I_1}{T - T_1} e^{b_2 (T_1 - t)}$$

und für die Zeit $t = T_1$

$$\left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t = T_1} = \frac{\varepsilon I_1}{T - T_1}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit Gleichung 4, so erkennen wir, daß in erster Annäherung

$$(6.) \qquad \varepsilon = \frac{I_2}{I_1}$$

zu setzen ist.

Werden für a_1, b_2 und ε ihre Werte eingesetzt, so ist der primäre und sekundäre Stromverlauf durch folgende Gleichungen dargestellt:

Im ersten Interwall für

$$0 \leqq t \leqq T_1$$

ist

$$i_1 = \frac{E_1}{w_1} \left(1 - e^{-\frac{w_1}{L_1} t} \right),$$

$$i_2 = I_2 e^{-\frac{w_2}{L_2} t} - E_1 \frac{M}{w_2 L_1 - w_1 L_2} \left(e^{-\frac{w_1}{L_1} t} - e^{-\frac{w_2}{L_2} t} \right);$$

Digitized by Google

im zweiten Intervalle, für

$$T_1 \leqq t \leqq T$$

ist

$$i_1 = \frac{I_1}{T - T_1}(T - t),$$

$$i_2 = \frac{I_2}{T - T_1}(t - T_1).$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke läßt sich jetzt auch der Ausdruck für die Kraft

$$k = \frac{C}{T}\int_0^T i_1\, i_2\, dt.$$

berechnen, indem man zerlegt

$$\int_0^T i_1\, i_2\, dt = \int_0^{T_1} i_1\, i_2\, dt + \int_{T_1}^T i_1\, i_2\, dt$$

und in die beiden Teilintervalle die entsprechenden Werte für i_1 und i_2 einsetzt. Man findet

$$k = \frac{C}{T}\left\{-\frac{a_1}{b_2}\left(I_2 + \frac{a_1 b_1 \varepsilon}{b_2 - b_1}\right)\left(e^{-b_2 T_1} - 1\right) + \frac{a_1{}^2 \varepsilon}{b_2 - b_1}\left(e^{-b_1 T_1} - 1\right)\right.$$

$$+ \frac{a_1}{b_2 + b_1}\left(I_2 + \frac{a_1 b_1 \varepsilon}{b_2 - b_1}\right)\left(e^{-(b_2 + b_1) T_1} - 1\right) - \frac{a_1{}^2 \varepsilon}{2(b_2 - b_1)}\left(e^{-2 b_1 T_1} - 1\right)$$

$$\left. + \frac{1}{6} I_1 I_2 (T - T_1)\right\}.$$

Diese Formel läßt sich noch bedeutend vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\varepsilon = \frac{I_2}{I_1}, \qquad I_1 = a_1\left(1 - e^{-b_1 T_1}\right) \text{ ist,}$$

und daß $e^{-b_2 T_1}$ und $e^{-(b_2 + b_1) T_1}$ sehr nahe gleich Null, also zu vernachlässigen sind.

Es ergibt sich

$$k = -\frac{C}{T}\frac{a_1 I_2}{2(b_2 + b_1)} + \frac{C}{T}\frac{a_1 I_2}{2}\frac{b_2^2 + b_2 b_1 + 2 b_1^2}{b_2\left(b_2^2 - b_1^2\right)} e^{-b_1 T_1} + \frac{C}{6} I_1 I_2 \frac{T - T_1}{T}$$

Digitized by Google

Läßt man diese Vernachlässigung auch noch für $e^{-b_1 T_1}$ eintreten, so kommt die Formel auf die ganz einfache Gestalt:

$$k = -\frac{C}{T}\frac{a_1 I_2}{2(b_2 + b_1)} + \frac{C}{6} I_1 I_2 \frac{T - T_1}{T},$$

oder, wenn man I_2 in seiner Abhängigkeit von I_1 durch $I_2 = \varepsilon I_1$ darstellt und a_1 in erster Annäherung durch I_1 ersetzt,

$$k = -\frac{C}{2T} I_1^2 \frac{\varepsilon}{b_2 + b_1} + \frac{C}{6} I_1^2 \varepsilon \frac{T - T_1}{T}.$$

Werden schließlich für ε, b_1 und b_2 die Werte eingesetzt, so wird

$$k = -\frac{C}{2T} I_1^2 \frac{M L_1}{L_1 w_2 + L_2 w_1} + \frac{C}{6} I_1^2 \frac{M}{L_2} \frac{T - T_1}{T}.$$

Bei sinusförmigem Verlauf des Primärstromes verschwindet die Abstoßung, wenn $\cos \delta = 0$, d. h. $\delta = 90^0$ ist. Das ist der Fall, wenn $b_2 = \frac{w_2}{L_2}$ unendlich groß gegen T, also L_2 unendlich klein gegen w_2 ist. Ebenso würde hier das Hauptglied der obigen Reihe, auf dem die Abstoßung beruht, verschwinden, wenn b_2 unendlich groß gegen T wäre.

Digitized by Google

Vergleichung der Theorie mit den Messungen.

Mit Hilfe unserer Messungen im vorigen Teil können wir die in den aufgestellten Gleichungen vorkommenden Konstanten auch zahlenmäßig ausdrücken und uns so ein Urteil darüber bilden, mit welcher Annäherung die Gleichungen (3.) und (4.) den Verlauf des sekundären Stromes angeben.

In Gleichung (6.) hatten wir bereits einen angenäherten Wert für die eine Konstante gefunden, nämlich

$$\varepsilon = \frac{I_2}{I_1}. \tag{6.}$$

Um auch den Wert für b_2 zu erhalten, müssen wir vorerst die Größen a_1 und b_1 in Gleichung (1.) zahlenmäßig ausdrücken. Da wir jedoch aus unseren Kurven nicht die direkten Zeiten, sondern immer nur das Verhältnis $\frac{t}{T}$ entnehmen können, wollen wir setzen

$$b_1 = \frac{\beta_1}{T}, \qquad b_2 = \frac{\beta_2}{T}.$$

Dann lautet Gleichung (1.)

$$i_1 = a_1 \left(1 - e^{-\beta_1 \frac{t}{T}} \right)$$

und Gleichung (3.)

$$i_2 = I_2 e^{-\beta_2 \frac{t}{T}} - \frac{a_1 \beta_1 \varepsilon}{\beta_2 - \beta_1} \left(e^{-\beta_1 \frac{t}{T}} - e^{-\beta_2 \frac{t}{T}} \right).$$

Aus einer unserer aufgezeichneten Primärkurven, z. B. für den ersten Fall aus Fig. 5 entnehmen wir dann für zwei verschiedene $\frac{t}{T}$ die zugehörigen Werte für i_1.

Digitized by Google

Wir erhalten dann, indem wir die aus der Figur entnommenen Ordinaten durch Multiplikation mit 2,83 in Ampere ausdrücken, z. B. für

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{t}{T} = \frac{2}{3}$$

die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\begin{cases} 6{,}934 = a_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{3}\beta_1}\right) \\ 9{,}793 = a_1 \left(1 - e^{-\frac{2}{3}\beta_1}\right) \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\beta_1 = 2{,}93.$$
$$a_1 = 11{,}6.$$

Für die Konstante ε ergibt sich nach Gleichung (6.) der Zahlenwert

$$\varepsilon = \frac{I_2}{I_1} = 12{,}1.$$

Die Konstante β_2 läßt sich leicht aus der Gleichung des sekundären Stromes durch Ausmessung der sekundären Kurve ermitteln. Als Mittelwert für β_2 erhält man aus verschiedenen Berechnungen

$$\beta_2 = 11{,}1.$$

In ganz analoger Weise lassen sich aus den Fig. 6 und 13 auch die Konstanten für den zweiten im vorigen Teil behandelten Fall berechnen. Wir erhalten

$$a_1 = 15{,}7$$
$$\beta_1 = 2{,}3$$
$$\beta_2 = 12{,}6$$
$$\varepsilon = 13{,}6.$$

Mit Hilfe dieser Werte können wir jetzt aus unseren Gleichungen die Größe von i_1 und i_2 zu den verschiedenen Zeiten zahlenmäßig berechnen. In den beiden folgenden Tabellen sind diese berechneten Werte mit den gemessenen für unsere beiden Fälle zusammengestellt.

Digitized by Google

Versuchsreihe I.

$\frac{t}{T}$	Ampere			
	i_1		i_2	
	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen
0	0	0	+ 133	+ 133
0,1	2,95	3,11	+ 22,92	0
0,2	5,13	5,00	— 8,08	— 11,90
0,3	6,58	6,51	— 14,37	— 14,21
0,4	7,56	7,52	— 13,43	— 13,32
0,5	8,60	8,50	— 10,89	— 10,75
0,6	9,22	9,20	— 8,74	— 9,32
0,7	9,77	9,74	— 5,35	— 4,90
0,8	10,28	10,21	— 4,12	— 2,90
0,9	10,63	10,60	— 2,65	— 1,30
1	0	0	+ 133	+ 133

Versuchsreihe II.

$\frac{t}{T}$	Ampere			
	i_1		i_2	
	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen
0	0	0	+ 190,4	+ 190,4
0,1	3,22	3,47	+ 26,14	+ 7,24
0,2	5,79	6,00	— 16,18	— 19,04
0,3	7,98	8,01	— 23,38	— 23,80
0,4	9,59	9,62	— 20,50	— 20,44
0,5	10,74	10,75	— 17,57	— 19,64
0,6	11,75	11,75	— 14,42	— 16,66
0,7	12,56	12,58	— 11,18	— 11,90
0,8	13,31	13,35	— 8,39	— 7,14
0,9	13,82	13,86	— 5,70	— 3,38
1	0	0	+ 190,4	+ 190,4

Diese Zusammenstellung zeigt, daß der primäre Strom durch unsere Gleichungen auf Seite 32 und 33 mit großer Genauigkeit dargestellt wird. Nicht so gut ist die Übereinstimmung der

Digitized by Google

berechneten und gemessenen Kurven für den sekundären Strom. Die berechnete Kurve fällt zu Beginn des betrachteten Intervalls weniger steil ab und steigt auch gegen Ende des Intervalls weniger steil bis zu ihrem Maximum an. Während des weitaus größten Teils des Intervalls allerdings ist auch hier die Übereinstimmung eine leidlich gute. Die stattfindenden Abweichungen sind ohne weiteres erklärlich, denn beim Ableiten unserer Gleichungen mußten wir ja, um zu einigermaßen einfachen Ausdrücken zu gelangen, mancherlei Vernachlässigungen eintreten lassen; so wurde z. B. die Rückwirkung des sekundären auf den primären Strom außer acht gelassen und auch die Wirkungen des Eisenkerns vermochte die Theorie nicht hinreichend zu berücksichtigen.

Eine weitere Prüfung unserer Theorie können wir anstellen, indem wir jetzt auch die Kraft zahlenmäßig ausdrücken mit Hilfe der Seite 34 abgeleiteten Formel

$$k = -\frac{C}{T}\frac{a_1 I_2}{2(b_2 + b_1)} + \frac{C}{6} I_1 I_2 \frac{T - T_1}{T}$$

oder

$$k = -C\frac{a_1 I_2}{2(\beta_2 + \beta_1)} + \frac{C}{6} I_1 I_2 \frac{T - T_1}{T},$$

indem wir wieder statt b_1 und b_2 die Werte $\frac{\beta_1}{T}$ und $\frac{\beta_2}{T}$ einsetzen. Für das Verhältnis $\frac{T - T_1}{T}$ ergeben die gemessenen Stromkurven ungefähr den Wert $\frac{1}{30}$.

Für den ersten unserer beiden Fälle erhalten wir

$$k = 0{,}0089\ (-\ 54{,}98 + 8{,}15)$$
$$= -\ 0{,}42.$$

Beobachtet war eine Abstoßung von 0,47.

Für den zweiten Fall erhalten wir

$$k = 0{,}0089\ (-\ 100{,}31 + 14{,}82)$$
$$= -\ 0{,}76,$$

während die Beobachtung den Wert $k = -\ 0{,}95$ ergeben hatte.

In beiden Fällen, namentlich im letzteren, weicht der berechnete Wert der abstoßenden Kraft von dem beobachteten nicht unerheblich ab. Diese Abweichung wird noch größer,

Digitized by Google

wenn wir das Korrektionsglied mit in Rechnung ziehen, das sich bei Berücksichtigung der Glieder mit $e^{-b_1 T_1}$ ergab (S. 34). Im ersten Falle wird dann der Fehler noch um 0,05, im zweiten um 0,13 größer. Nach dem Vorhergehenden sind diese Abweichungen selbstverständlich. Der Theorie nach hatte sich aus den angegebenen Gründen für die sekundäre Kurve ein langsamerer Abfall und langsamerer Anstieg ergeben, als die Beobachtung zeigte. Daher überwiegt der Theorie nach die Abstoßung zeitlich nicht so stark über die Anziehung, wie es in Wirklichkeit der Fall ist. Auf diesem starken zeitlichen Überwiegen der abstoßenden Kraft aber beruht ja, wie die Messungen ergeben hatten, die Gesamtwirkung der Thomsonschen Versuche.

Thesen.

1. Alle bisher aufgestellten Theorien für die Wirkungsweise des Kondensators am Induktorium sind unzulänglich.

2. Die Wechselwirkungen zwischen elektrischen Strömen und Magneten, sowie die Induktionsvorgänge werden am besten mit Hilfe der Kraftlinientheorie dargestellt.

3. Die Stübelsche Vulkantheorie ist den älteren Theorien vorzuziehen.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

Lebenslauf.

Ich, Alfred Theodor Winderlich, evangelischer Konfession, wurde am 10. April 1880 zu Lagardesmühlen (N.-M.) geboren. Ostern 1889 trat ich in die Sexta des städtischen Realgymnasiums zu Frankfurt a. O. ein, das ich Ostern 1898 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Von dieser Zeit an studierte ich bis Michaelis 1899 in Breslau, bezog für die nächsten beiden Semester die Universität Leipzig und studierte dann in Greifswald, wo ich am 15. Juli 1904 die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen und am 29. Juli 1904 das examen rigorosum bestand. Seit Michaelis 1903 bin ich mit der kommissarischen Verwaltung einer Oberlehrerstelle am Kgl. Gymnasium zu Strasburg (Westpr.) beauftragt.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten: in Breslau: Caro, Ebbinghaus, Freudenthal, Heydweiller, Kölbing, Leonhard, London, Meyer, Partsch, Pillet, Rosanes, Stern, Sturm. In Leipzig: Engel, Eulenburg, Friedrich, Hölder, Neumann, Ratzel, Wiedeburg, Wiener, Wundt. In Greifswald: Auwers, Credner, Holtz, König, Kowalewski, Mie, Rehmke, Richarz, Study, Thomé.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen ehrerbietigsten Dank aus.

Digitized by Google

YC 1

QC638
W5
Winderlich
166262

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

AN INITIAL FINE OF 25 CENTS
WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN
THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY
WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE
DAY AND
OVE

Digitized by Google

Digitized by Google